**Klasse B12T5**
**1. Schulaufgabe aus der Mathematik**
**am 28.11.2011**

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f_k : x \mapsto \frac{1}{27}(x^3 - 3x^2 - 9kx + 27k)$ ; $k \in \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit $G_{fk}$ bezeichnet.

1.1 Zeigen Sie, dass $x_0 = 3$ eine Nullstelle aller Graphen $G_{fk}$ ist. [8]
Bestimme Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von $G_{fk}$ in Abhängigkeit von k.

1.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm $g_k(x)$ der Gerade $g_k$, die durch den Schnittpunkt $N_0(3|0)$ mit der x-Achse und den Schnittpunkt $S_y$ von $G_{fk}$ mit der y-Achse festgelegt ist. [4]
Weisen Sie nach, dass diese Gerade den Graphen $G_{fk}$ auf der y-Achse berührt.

1.3 Untersuchen Sie, für welche Werte von k der Graph $G_{fk}$ Stellen mit horizontaler Tangente besitzt. [6]
Geben Sie an, welche besonderen Punkte an diesen Stellen vorliegen.

2.0 Ab nun sei **k = 5** und $f_5(x) = f(x) = \frac{1}{27}(x^3 - 3x^2 - 45x + 135)$. Der Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

2.1 Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse von 1.1 die Linearfaktor-Zerlegung des Funktionsterms von f an. [9]
Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte von $G_f$, sowie die Koordinaten des Wendepunktes.

2.2 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse $G_f$ für $-7 \le x \le 7$ sowie den Graphen der in Aufgabe 1.2 berechneten Gerade $g_5$ in das vorhandene Koordinatensystem. [5]

3.0 Gegeben sei weiterhin die reelle Funktion h durch $h : x \mapsto \frac{1}{27}(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 45x)$.

3.1 Die reelle Funktion d ist festgelegt durch $d(x) = f(x) - h(x)$. [7]
Ermitteln Sie mit Hilfe einer Vorzeichentabelle den Bereich B, für den gilt: $d(x) > 0$.
Geben Sie an, welche Bedeutung der Bereich B für den Verlauf der Graphen beider Funktionen hat.

4.0 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcrcrcl} (k+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & kx_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

4.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von k. [8]

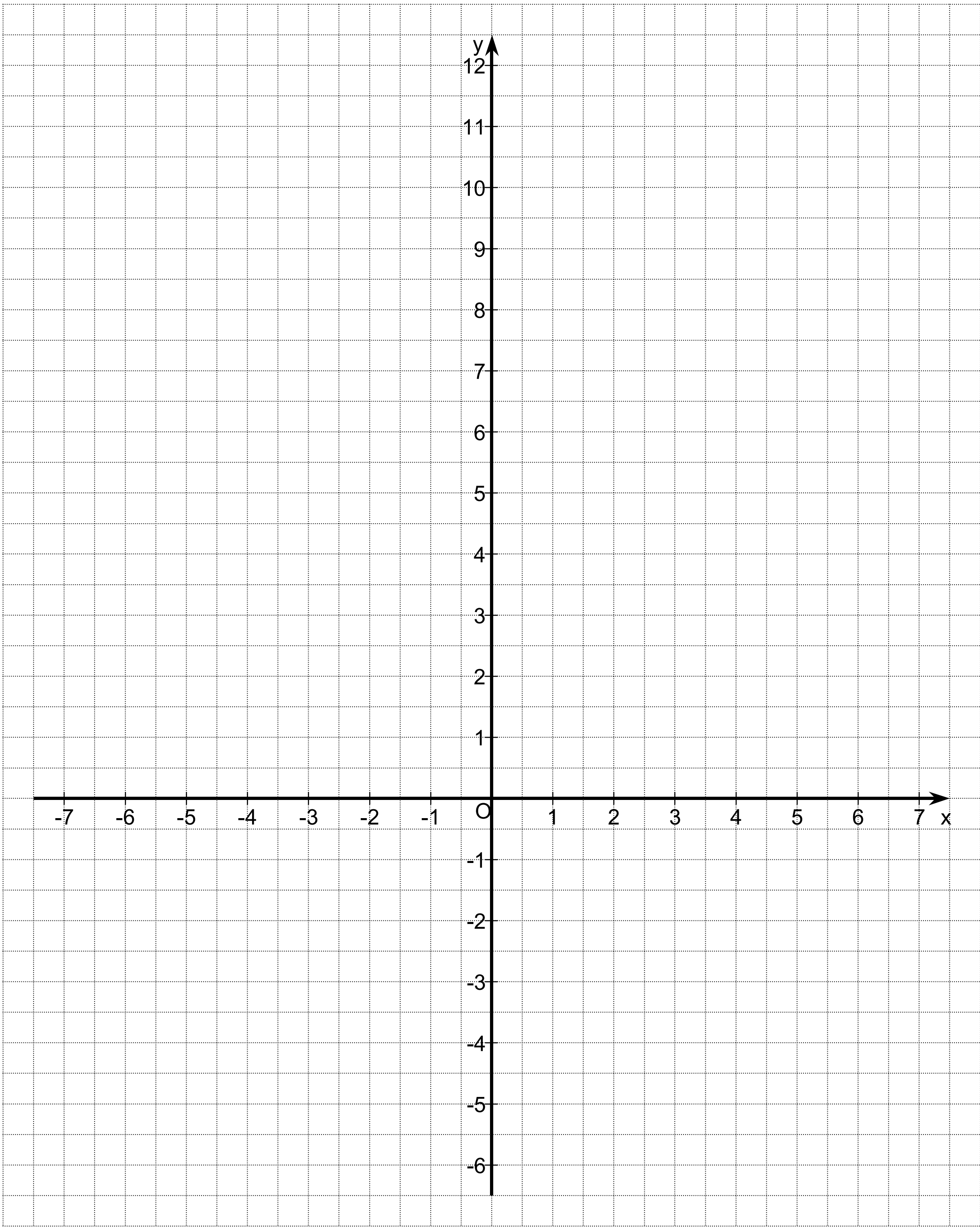
4.2 Untersuchen Sie, ob und ggf. für welche Werte von k sich $x_2 = 1$ ergibt.
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge. [5]

NP

**Klasse B12T5**
**1. Schulaufgabe aus der Mathematik**
**am 28.11.2011**

**Name: .......................................................**

| 1.1 | 1.2 | 1.3 | 2.1 | 2.2 | 3.1 | 4.1 | 4.2 | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | BE |



B12T5 1. Schulaufgabe am 28.11.11

1.1 $f_k(3) = \frac{1}{27}(3^3 - 3\cdot 3^2 - 9k\cdot 3 + 27k) = 0$ (Beh. w.)

(8) $(x^3 - 3x^2 - 9kx + 27k) : (x-3) = x^2 - 9k$

$-(x^3 - 3x^2)$

$-9kx + 27k$

$-(-9kx + 27k)$ $x^2 - 9k = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9k$

1. Fall: $k < 0$ : $x_0 = 3$ ist einzige 1-f NST

2. Fall: $k = 0$ : $x_0 = 3$ 1-f, $x_{1/2} = 0$ 2-f } 2 NST

3. Fall: $k > 0$ $x_0 = 3$; i. A.: $x_1 = 3\sqrt{k}$, $x_2 = -3\sqrt{3}$ } 3 1-f NST

3.1 SF: $x_1 = x_0$ für $k = 1$

dann $x_0 = 3$ do NST, $x_2 = -3$ 1-f NST } 2 NST

1.2 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k-0}{0-3} = -\frac{1}{3}k$ ; $S_y(0/k)$

(4) $g_k(x) = -\frac{1}{3}kx + k$ } 2,5

Andererseits: $f_k'(x) = \frac{1}{27}(3x^2 - 6x - 9k)$

$m_T = f_k'(0) = \frac{1}{27}\cdot(-9k) = -\frac{1}{3}k$ und $t = k$

$\Rightarrow$ Gerade $g_k$ ist auch Tangente (bei $x_0 = 0$)

1.3 $f_k'(x) = \frac{1}{27}(3x^2 - 6x - 9k) = \frac{1}{9}(x^2 - 2x - 3k) = 0$

$D = 4 - 4\cdot 1\cdot(-3k) = 12k + 4$

(6) • $D < 0$ : $12k + 4 < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{4}{12} \Leftrightarrow k < -\frac{1}{3}$

keine waagrechten Tangenten

• $D = 0$ für $k = -\frac{1}{3}$ : 1 waagr. Tang bei TEP

• $D > 0$ für $k > -\frac{1}{3}$ : 2 waagr. Tang bei HOP / TIP

B 12T5 1. Schulaufgabe am 28.11.11

2.0 $k = 5$ ; $f(x) = \frac{1}{27}(x^3 - 3x^2 - 45x + 135)$

2.1 $f(x) = \frac{1}{27}(x-3)(x+3\sqrt{5})(x-3\sqrt{5})$ ; $3\sqrt{5} \approx 6{,}71$

(9)

$f'(x) = \frac{1}{9}(x^2 - 2x - 15) = \frac{1}{9}(x-5)(x+3)$ $\quad \frac{40}{27} \approx 1{,}48$

$x_1 = 5 \quad x_2 = -3$ je 1-f

| | | $x_1$ | | $x_2$ | | $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| VZ v. $f'$ | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f$ | aus | HOP | auf | TIP | aus | |

$f(-3) = 8 \Rightarrow HOP(-3/8)$

$f(5) = -\frac{40}{27} \Rightarrow TIP(5/-\frac{40}{27})$

$f''(x) = \frac{1}{9}(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x_w = 1$ (einf. m. VZW)

$f(1) = \frac{88}{27} \Rightarrow W(1/\frac{88}{27})$ ; $\frac{88}{27} \approx 3{,}26$

2.2 $G_f$ (4) und $G_g$ (1)

3.1 $h(x) = \frac{1}{27}(\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 45x)$

(7)

$f(x) = \frac{1}{27}(x^3 - 3x^2 - 45x + 135)$

$d(x) = f(x) - h(x) = \frac{1}{27}(-\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 135) = 0$

Subst.: $x^2 = u$ : $-\frac{1}{4}u^2 - 3u + 135 = 0$

$u_{1/2} = \frac{1}{-2 \cdot 1/4}(3 \pm \sqrt{9 - 4(-\frac{1}{4}) \cdot 135})$

$= -2(3 \pm \sqrt{144}) = -2(3 \pm 12)$

$u_1 = -2 \cdot 15 = -30$ ; $u_2 = +2 \cdot 9$

Resub $\lightning$ $\quad x_{1/2} = \pm 2\sqrt{3}$

| | | $x_1$ | | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| VZ $d(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |

$B = ]-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}[$

Dort verläuft $G_f$ oberhalb von $G_h$.

B12T5 1. Schulaufgabe am 28. 11. 11

4.1

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $1$ | $k$ | $2$ | $1$ |
| $k+1$ | $1$ | $1$ | $1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1$ | $1$ | $1$ |
| $-1$ | $k-2$ | $0$ | $-1$ |
| $k$ | $0$ | $0$ | $0$ |

$III: \; kx_1 = 0$

1. Fall: $k = 0 \Rightarrow 0 \cdot x_1 = 0$ (w); setze $x_1 = \alpha$

$II \quad -\alpha + (\underbrace{k-2}_{=0}) x_2 = -1 \Leftrightarrow -2x_2 = -1 + \alpha$

$\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$

$III \quad x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 1 - \alpha - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$

Für $k = 0$: $L = \{(\alpha \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha \mid \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha)\}$

2. Fall $k \neq 0$: $kx_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$II \quad (k-2)x_2 = -1$

2.1. $k = 2$: $0x_2 = -1$ (f) $\Rightarrow L = \{\}$ f. $k = 2$

2.2 $k \neq 2$: $x_2 = \frac{-1}{k-2}$

$x_3 = 1 - x_2 - x_1 = 1 - \frac{-1}{k-2} = \frac{k-2+1}{k-2}$

$L = \{(0 \mid \frac{1}{2-k} \mid \frac{k-1}{k-2})\}$ Für $k \neq 2$, $k \neq 0$

4.2 $k = 0$: $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha = 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = -1 = x_1$

$x_3 = x_2 = 1 \Rightarrow L = \{(-1 \mid 1 \mid 1)\}$

$k = 2$: $L = \{\}$ geht nicht

sonst: $\frac{1}{2-k} = x_2 = 1 \Leftrightarrow 2 - k = 1 \Leftrightarrow k \stackrel{!}{=} 1$

Dann $x_1 = 0$ und $x_3 = \frac{k-1}{k-2} = 0 \Rightarrow L = \{(0 \mid 1 \mid 0)\}$

Für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2\}$ ergibt sich für $x_2$ niemals $x_2 = 1$